09/10/17.

Αριθμητική Ανάλυση: Είναι η επιστήμη των εφαρμοσμένων μαθηματικών που μετατρέπει προβλήματα των μαθηματικών σε αντίστοιχα προβλήματα που μπορούν να λύσουν ή να προσεγγιστούν από έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. Ουσιαστικά διακριτοποιεί τα συνεχή προβλήματα σε αντίστοιχα διακριτά. Επινοεί μεθόδους που της χαρακτηρίζουμε ως "αξιόπιστες" και "αποτελεσματικές" για την λύση μαθηματικών προβλημάτων με τον Η/Υ.

Ορισμός: "Αξιόπιστες" με την έννοια ότι στα μικρά σφάλματα στα δεδομένα και στα ενδιάμεσα αποτελέσματα επιφέρουν μικρά σφάλματα στο τελικό αποτέλεσμα.
(Σφάλματα φραγμένα από κάποιον αριθμό-επιθυμητή ακρίβεια)

Ορισμός: "Αποτελεσματική" με την έννοια ότι ο Η/Υ επαρκεί σε μνήμη και λύνει το πρόβλημα σε επιθυμητό χρόνο ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

"Σφάλματα"

Δύο είδη σφάλματα.
-> Το σφάλμα διακριτοποίησης ή προσέγγισης που οφείλεται στην διακριτοποίηση του προβλήματος.

→ Το σφάλμα της στρογγύλευσης που οφείλεται στην αποθήκευση σε έναν Η/Υ.

<u>Παραδείγματα</u>

α) Σφάλμα διακριτοποίησης:
Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την $f'(x_0)$, όπου $x_0 \in (a,b)$ και η f είναι 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο (a,b): $f \in C^2((a,b))$

<u>Λύση</u>

Γνωρίζουμε ότι $f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (ορισμός παραγώγου)

Προσεγγίζουμε την $f'(x_0)$ θεωρώντας $x_1 \in (a,b)$ κοντά στο x_0.

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

Θεωρούμε το ανάπτυγμα Taylor της $f(x_1)$ στο x_0.

Απόδειξη $f(x_1) = f(x_0) + (x_1-x_0)f'(x_0) + \frac{(x_1-x_0)^2}{2} f''(\xi)$, $\xi \in (\min\{x_0, x_1\}, \max\{x_0, x_1\})$ $\Leftrightarrow$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} - \frac{(x_1-x_0)}{2} f''(\xi) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} - f(x_0) = \frac{x_1-x_0}{2} f''(\xi)$$

Αν η f'' είναι φραγμένη στο (a,b): $|f''(x)| \leq M$, $\forall x \in (a,b)$ όπου $0 \leq M < \infty$ τότε το απόλυτο σφάλμα:

$$|\varepsilon| = \left|\frac{x_1-x_0}{2}\right| |f''(\xi)| \leq \frac{h}{2} M$$

2ος τροπος

Θεωρώ βήμα $h>0$ και $x_1 = x_0+h$, $x_2 = x_0-h$ και προσεγγίζω την $f'(x_0)$ ως:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

Εδώ υποθέτουμε ότι $f \in C^3((a,b))$ και θεωρούμε τα αναπτύγματα Taylor.

- $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_1)$,

$\xi_1 \in (x_0, x_1)$

- $f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) - \frac{h^3}{\underset{3!}{6}} f'''(\xi_2)$,

$\xi_2 \in (x_2, x_1)$

Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2h f'(x_0) + \frac{h^3}{6}\left(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right) \Leftrightarrow$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}\left(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right)$$

$$\varepsilon = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) = \frac{h^2}{12}\left(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right)$$

Αν η f''' είναι φραγμένη στο (a,b):

$|f'''(x)| \leq M$, $\forall x \in (a,b)$ όπου $0 \leq M < \infty$, τότε το:

$$|\varepsilon| \leq \frac{h^2}{12}\left(|f'''(\xi_1)| + |f'''(\xi_2)|\right) \leq \frac{h^2}{6} M.$$

Ο δεύτερος τρόπος είναι σφάλμα κατά τάξη μεγέθους μικρότερο του πρώτου.

Για την προσέγγιση της ακριβούς τιμής x βρίσκουμε την x^*, τότε ορίζουμε σφάλμα:

$$\boxed{\varepsilon = x^* - x}$$

Απόλυτο σφάλμα: $|\varepsilon| = |x^* - x|$

Έστω ότι $x \neq 0$ η τιμή που θέλουμε να υπολογίσουμε. Ορίζουμε ως σχετικό σφάλμα:

$$\boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{x}}$$

Ισχύει $\delta = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{x^* - x}{x} \approx \frac{x^* - x}{x^*}$

Απόλυτο σχετικό σφάλμα: $|\delta| = \left|\frac{\varepsilon}{x}\right| = \left|\frac{x^* - x}{x}\right| \approx \frac{|x^* - x|}{|x^*|}$

~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~

Ένας αριθμός παριστάνεται στο δεκαδικό σύστημα ως $\pm(a_\nu a_{\nu-1} \ldots a_0 . a_1 a_2 \ldots)_{10}$ όπου a_k ψηφία του δεκαδικού συστήματος (από 0 έως 9)

$$\pm(a_\nu a_{\nu-1} \ldots a_0 . a_1 a_2 \ldots)_{10} = (a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_\nu \cdot 10^\nu + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + \ldots) = \pm\sum_{k=-\infty}^{n} a_k \cdot 10^k.$$

Ένας αριθμός με βάση το B, $B \geq 2$ παριστάνεται ως: $\pm(a_\nu a_{\nu-1} \ldots a_0 . a_1 a_2 \ldots) =$

$= \pm\sum_{k=-\infty}^{n} a_k \cdot B^k$, όπου a_k ψηφία του συστήματος με βάση το B, από 0 έως $B-1$.